

ZAHLEN UND OPERATIONEN

Die Zahlen 1; 2; 3; 4; 5; ... werden zur Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$ zusammengefasst:

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}$$

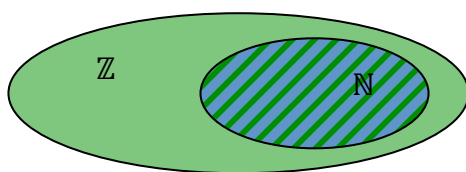
$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}$$

Bsp.: $7 \in \mathbb{N}$: „7 ist ein Element der Menge der natürlichen Zahlen.“

$0 \notin \mathbb{N}$: „0 ist kein Element der Menge der natürlichen Zahlen.“

Die natürlichen Zahlen werden mit der Menge der negativen Zahlen $\{-1; -2; -3; \dots\}$ und der Zahl 0, die weder positiv noch negativ ist, zur Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ erweitert:

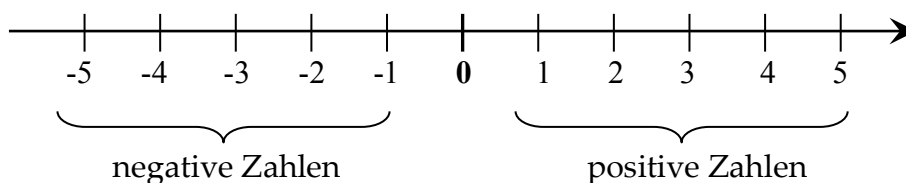
$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$



Bsp.: $-4 \in \mathbb{Z}$

$-4 \notin \mathbb{N}$

Dabei wird ebenfalls der Zahlenstrahl symmetrisch zur 0 zur **Zahlengeraden** erweitert:



Die weiter rechts liegende Zahl ist stets die größere!

Bsp.: $-3 < -1 < 0 < 2$: „-3 ist kleiner als -1 ist kleiner als 0 ist kleiner als 2“

Der Abstand einer ganzen Zahl a von der Zahl 0 ist ihr **Betrag** $|a|$.

Eine Zahl und ihre Gegenzahl besitzen denselben Abstand zur 0, also denselben Betrag.

Bsp.: $|-7| = 7$; $|+7| = 7$

Das **Dezimalsystem** ist ein Stellenwertsystem, bei dem die Stelle, an der eine Ziffer steht, ihren Wert festlegt.

Die einzelnen Stufenzahlen (1, 10, 100, 1 000, 10 000, ...) entsprechen dabei jeweils dem zehnfachen Wert der vorangehenden Stufe und können mit **Zehnerpotenzen** geschrieben werden.

Bsp.: $10\,000 = 10^4$ „Zehn hoch 4“

$1\,000\,000\,000 = 10^9$ „Zehn hoch 9“

Beim **Runden** auf einen Stellenwert betrachtet man die nächstkleinere Stelle:

Bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 rundet man ab,

bei 5, 6, 7, 8 und 9 rundet man auf.

Bsp.: Runden auf Hunderter: 3 942 $\approx$ 3 900

Runden auf Tausender: 13 637 $\approx$ 14 000

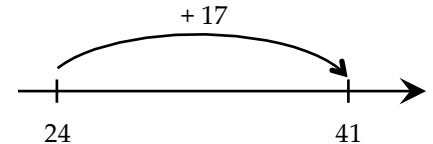
Rechenarten

Bei der Rechenart **Addition** erhält man den Wert einer Summe.

Bsp.:

$$\begin{array}{ccc} 24 & + & 17 \\ \text{1. Summand} & & \text{2. Summand} \\ \hline & = & 41 \\ & & \text{Wert der Summe} \end{array}$$

Summe

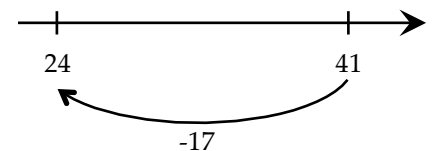


Bei der Rechenart **Subtraktion** erhält man den Wert einer Differenz.

Bsp.:

$$\begin{array}{ccc} 41 & - & 17 \\ \text{Minuend} & & \text{Subtrahend} \\ \hline & = & 24 \\ & & \text{Wert der Differenz} \end{array}$$

Differenz



Die Addition und die Subtraktion sind zueinander umgekehrte Rechenarten.

Bei der Rechenart **Multiplikation** erhält man den Wert eines Produkts.

Bsp.:

$$\begin{array}{ccc} 12 & \cdot & 7 \\ \text{1. Faktor} & & \text{2. Faktor} \\ \hline & = & 84 \\ & & \text{Wert des Produkts} \end{array}$$

Produkt

Bei der Rechenart **Division** erhält man den Wert eines Quotienten.

Bsp.:

$$\begin{array}{ccc} 84 & : & 12 \\ \text{Dividend} & & \text{Divisor} \\ \hline & = & 7 \\ & & \text{Wert des Quotienten} \end{array}$$

Quotient

Ein Produkt, das aus lauter gleichen Faktoren besteht, kann als **Potenz** geschrieben werden.

Bsp.:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 \begin{array}{cc} \text{Exponent} & \\ = & 125 \\ \text{Basis} & \text{Wert der Potenz} \end{array}$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$$

Beachte: $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$

Vorzeichenregeln bei der Addition und Subtraktion:

Addition zweier ganzer Zahlen

mit **gleichen** Vorzeichen:

- 1) Addition der Beträge
- 2) Die Summe erhält das gemeinsame Vorzeichen

$$\begin{aligned}\text{Bsp.: } (+4) + (+13) &= 4 + 13 = +17 \\ (-4) + (-13) &= -4 - 13 = -17\end{aligned}$$

mit **verschiedenen** Vorzeichen:

- 1) Subtraktion des kleineren Betrags vom größeren
- 2) Die Summe erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag

$$\begin{aligned}(-29) + 17 &= -29 + 17 = -12 \\ 17 + (-9) &= 17 - 9 = 8\end{aligned}$$

Subtraktion einer ganzen Zahl bedeutet dasselbe wie die Addition ihrer Gegenzahl. Sie lässt sich folglich auf obiges Verfahren zurückführen.

$$\text{Bsp.: } (+4) - (+7) = (+4) + (-7) = 4 - 7 = -3 \quad (+4) - (-7) = (+4) + (+7) = 4 + 7 = 11$$

Vorzeichenregeln bei der Multiplikation und Division:

Für die **Multiplikation** und **Division** zweier ganzer Zahlen gilt:

- 1) Multipliziere oder dividiere die Beträge
- 2) Bei gleichen Vorzeichen erhält das Ergebnis das Vorzeichen „+“
Bei unterschiedlichen Vorzeichen erhält das Ergebnis das Vorzeichen „-“

$$\begin{array}{llll}\text{Bsp.: } -3 \cdot (+8) = -24 & 3 \cdot (-8) = -24 & 24 : (-3) = -8 & -24 : 3 = -8 \\ 3 \cdot 8 = 24 & (-3) \cdot (-8) = 24 & 24 : 3 = 8 & (-24) : (-3) = 8\end{array}$$

Grundsätzlich gilt also:

„Zwei **gleiche** Zeichen geben **PLUS**, zwei **verschiedene** ein **MINUS**“

Rechengesetze der Addition und Multiplikation ganzer Zahlen

Kommutativgesetz der Addition und Multiplikation:

Vertauschung von Summanden/Faktoren in einer Summe/einem Produkt

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Bsp.: } -14 + 27 &= 27 + (-14) \\ -4 \cdot 7 &= 7 \cdot (-4)\end{aligned}$$

Assoziativgesetz der Addition und Multiplikation: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
Setzen oder Weglassen von Klammern $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

$$\begin{aligned}\text{Bsp.: } (-5 + 4) + 6 &= -5 + (4 + 6) = -5 + 4 + 6 \\ [(-5) \cdot 4] \cdot (-6) &= -5 \cdot [4 \cdot (-6)] = -5 \cdot 4 \cdot (-6)\end{aligned}$$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ausmultiplizieren
Ausklammern

Bsp.:

$$(-4) \cdot (-13 + 5) = (-4) \cdot (-13) + (-4) \cdot 5$$

Aber auch

$$(121 - 33) : 11 = 121 : 11 - 33 : 11$$

Einen Rechenausdruck, der aus Zahlen, Rechenzeichen, Klammern und eventuell auch Platzhaltern besteht, nennt man einen **Term**.

Bei der Berechnung des Termwerts ist folgendes zu beachten:

- Klammern haben stets Vorrang und werden von innen nach außen berechnet!
- Potenzen vor Punktrechnungen ($\cdot$ und $:$) vor Strichrechnungen ($+$ und $-$)!
- Es wird von links nach rechts gerechnet!

Die Rechenart, die als letzte gerechnet wird, legt die Art des Terms fest.

Bsp.:

$$64 : (-2)^3 + 4^2 \cdot 3 - (53 - 13) \cdot 2 =$$

$$64 : (-2)^3 + 4^2 \cdot 3 - 40 \cdot 2 =$$

Klammern zuerst

$$64 : (-8) + 16 \cdot 3 - 40 \cdot 2 =$$

Potenzen

$$-8 + 48 - 80 =$$

Punkt- vor Strichrechnung

$$40 - 80 = -40$$

*Von links nach rechts rechnen*Gliederung eines Terms:

Bsp.:

$$-32 : 2^4 + 4 \cdot (12 - 9)$$

Potenz
Differenz
Quotient
Produkt
Summe

Primzahlen

Primzahlen sind natürliche Zahlen größer als 1, die nur durch die Zahl 1 und sich selbst teilbar sind.

Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutige **Primfaktorzerlegung** oder ist selbst bereits eine Primzahl.

Bsp.:

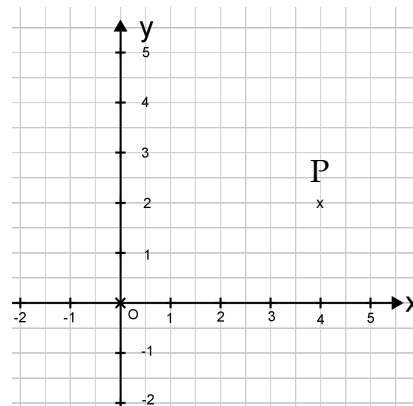
$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

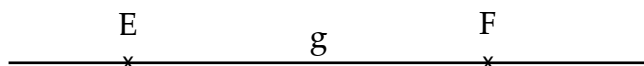
RAUM UND FORM

In einem **Koordinatensystem**, das aus zwei zueinander senkrecht stehenden Zahlengeraden besteht, gibt man die Lage von Punkten mit ihren Koordinaten an.

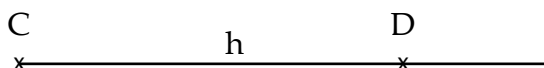
$P(4|2)$
 $\swarrow \quad \searrow$
 x-Koordinate y-Koordinate



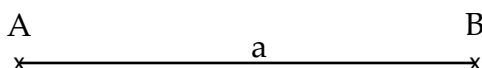
Eine **Gerade** hat keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt, z. B. **g** oder **EF**.



Eine **Halbgerade** hat einen Anfangspunkt, aber keinen Endpunkt, z. B. **h**.

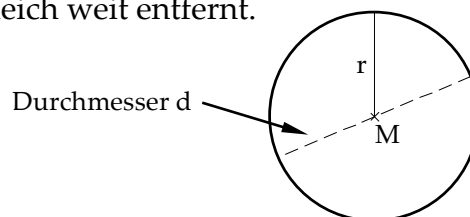


Eine **Strecke** hat einen Anfangspunkt und einen Endpunkt, z. B. **a** oder $\overline{AB}$, ihre Länge ist $|\overline{AB}|$.



Alle Punkte eines **Kreises** liegen von seinem *Mittelpunkt* M gleich weit entfernt. Diese Entfernung nennt man **Radius** r .

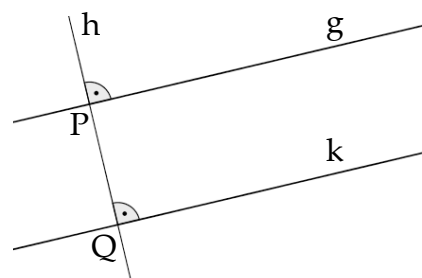
Für einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r schreibt man kurz $k(M; r)$.



Zwei zueinander **senkrechte** Geraden wie g und h schneiden sich im rechten Winkel, kurz $g \perp h$.

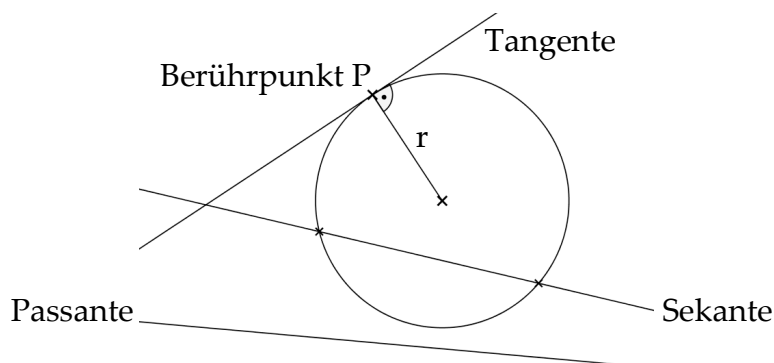
Sind zwei Geraden wie g und k **parallel**, schreibt man $g \parallel k$.

Die Gerade h ist hier das gemeinsame **Lot** von g und k .



Die Länge $|\overline{PQ}|$ der Strecke $\overline{PQ}$ ist hier sowohl der **Abstand** der beiden Punkte P und Q , als auch der Abstand des Punktes P von der Geraden k sowie der Abstand der beiden parallelen Geraden g und k .

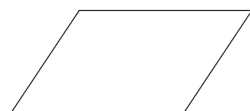
Eine Gerade kann an einem Kreis vorbeigehen (**Passante**) und keinen Schnittpunkt haben, sie kann ihn in einem Punkt berühren (**Tangente**) oder ihn in zwei Punkten schneiden (**Sekante**). Die Tangente steht dabei im Berührungspunkt auf dem Radius senkrecht.



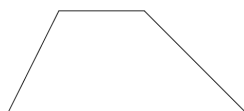
Vierecke



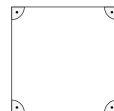
Rechteck



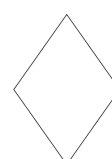
Parallelogramm



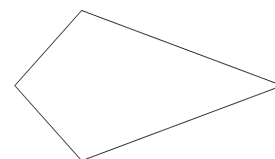
Trapez



Quadrat

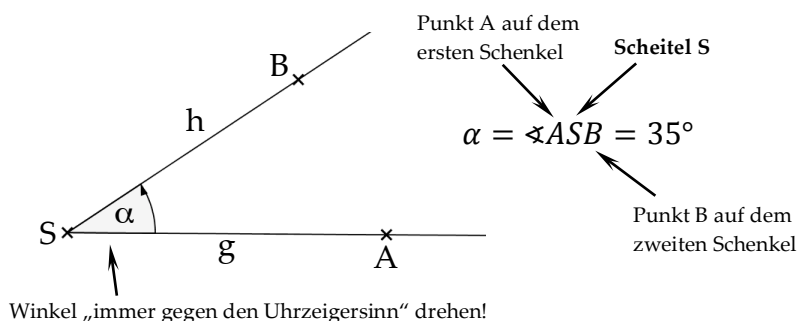


Raute

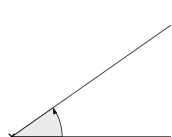
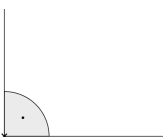
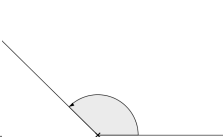
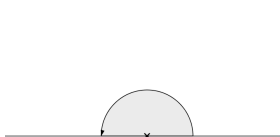
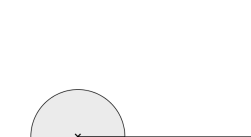
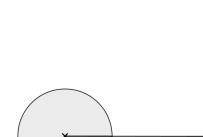


Drachenviereck

Jeder **Winkel** wird von zwei Halbgeraden mit gemeinsamen Anfangspunkt S gebildet. S nennt man den **Scheitel** des Winkels α und die beiden Halbgeraden **g** und **h** nennt man **Schenkel**.



Winkelarten:

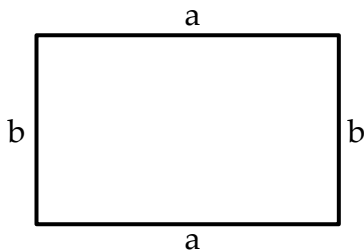
spitzer
Winkelrechter
Winkelstumpfer
Winkelgestreckter
Winkelüberstumpfer
Winkel

Vollwinkel

Der **Umfang** U einer Figur ist die Länge ihrer Randlinie.

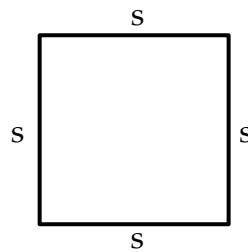
Umfang eines Rechtecks:

$$U_R = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$$



Umfang eines Quadrats:

$$U_Q = s + s + s + s = 4 \cdot s$$

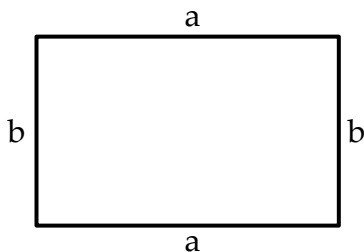


Bsp.: $U_R = 2 \cdot 12 \text{ dm} + 2 \cdot 3 \text{ cm} = 2 \cdot 120 \text{ cm} + 2 \cdot 3 \text{ cm} = 240 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 246 \text{ cm} = 2,46 \text{ m}$
 $U_Q = 4 \cdot 15 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$

Der **Flächeninhalt** A gibt an, wie groß eine Fläche ist bzw. wie oft eine Vergleichsfläche in ihr enthalten ist.

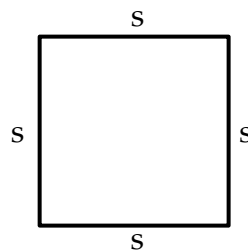
Flächeninhalt des Rechtecks

Rechteck:



$$A_R = a \cdot b$$

Quadrat:



$$A_Q = s \cdot s = s^2$$

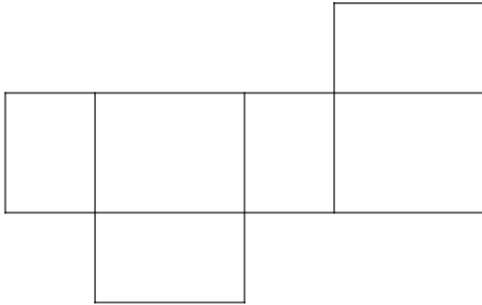
Bsp.: $A_R = 12 \text{ dm} \cdot 3 \text{ cm} = 120 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 360 \text{ cm}^2 = 3,6 \text{ dm}^2$
 $A_Q = 15 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 225 \text{ cm}^2 = 2,25 \text{ dm}^2$

Den Flächeninhalt zusammengesetzter Figuren kann man berechnen, indem man

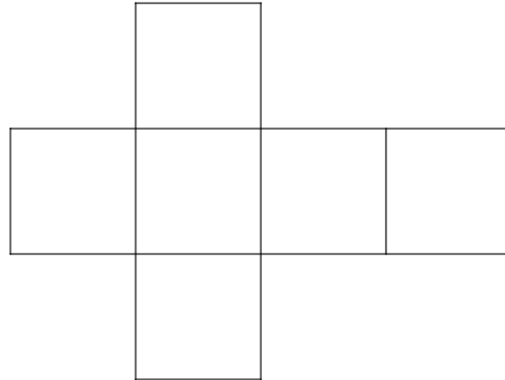
- sie in rechteckige Teilflächen zerlegt, diese ermittelt und addiert.
- sie zu einer Rechtecksfläche ergänzt, diese ermittelt und die nicht dazugehörenden Teilstücke subtrahiert.

Im **Netz** eines Quaders oder Würfels erscheinen alle seine Begrenzungsflächen in wahrer Größe.

Netz eines Quaders:

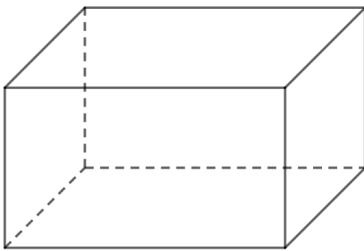


Netz eines Würfels:

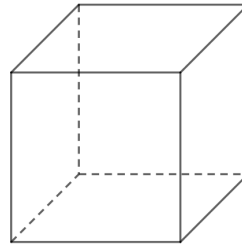


Den räumlichen Eindruck eines Quaders oder Würfels gibt man mit einem **Schrägbild** wieder. Dabei werden die „nach hinten verlaufenden“ Kanten parallel, verkürzt und in einem 45°-Winkel schräg gezeichnet (Zumeist 1 cm : 1 Kästchendiagonale).

Schrägbild eines Quaders:

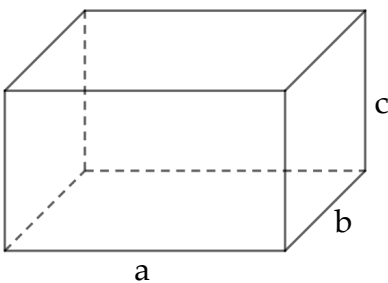


Schrägbild eines Würfels:



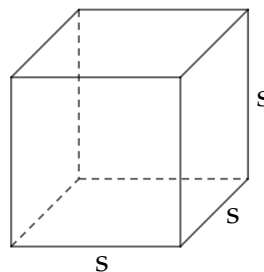
Oberflächeninhalt des Quaders

Quader:



$$O_Q = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

Würfel:



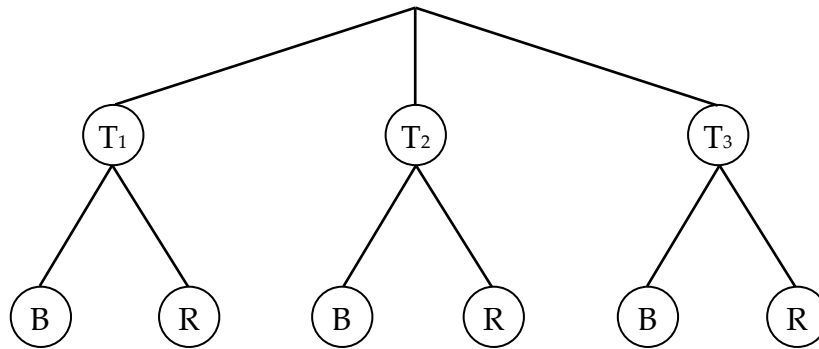
$$O_W = 6 \cdot s \cdot s = 6 \cdot s^2$$

Der Oberflächeninhalt eines zusammengesetzten Körpers ist die Summe aller seiner Begrenzungsflächen.

DATEN UND ZUFALL**Baumdiagramm und Zählprinzip**

Mit Hilfe eines **Baumdiagramms** wird die Anzahl aller Auswahlmöglichkeiten bestimmt, indem man die Gesamtzahl aller Wege (**Pfade**) durch den Baum zählt.

Bsp.: Auswahl von 3 Trikots und 2 Farben



Zählprinzip: Die Gesamtzahl der Möglichkeiten stimmt mit dem Produkt der Anzahlen der Wahlmöglichkeiten auf jeder Stufe überein (sofern keine Einschränkungen vorliegen).

Im Bsp.: $3 \cdot 2 = 6$

Für das Produkt natürlicher Zahlen von 1 bis n schreibt man kürzer: $n! = n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$
(Sprechweise: „n Fakultät“)

Bsp.: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

GRÖßEN UND MESSEN

Größen gibt man mit **Maßzahl** und **Einheit** an.

Bsp.: 3 m ; 9 kg ; 15 € ; 7 min

Größen

Geld: $1 \text{ €} = 100 \text{ ct}$ $1 \text{ ct} = 0,01 \text{ €}$

Masse: $1 \text{ t} = 1\,000 \text{ kg}$
 $1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ g}$
 $1 \text{ g} = 1\,000 \text{ mg}$

Länge: $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$
 $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$
 $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$
 $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$

Zeit(spanne): $1 \text{ d} = 24 \text{ h}$
 $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$
 $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

Fläche: $1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$
 $1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$
 $1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$
 $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$
 $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$
 $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$

Größen können in Kommaschreibweise oder mit gemischten Einheiten angegeben werden.

Bsp.: $5\,047 \text{ g} = 5,047 \text{ kg} = 5 \text{ kg } 47 \text{ g}$
 $204\,325 \text{ cm}^2 = 20,4325 \text{ m}^2 = 20 \text{ m}^2 43 \text{ dm}^2 25 \text{ cm}^2$

Rechnen mit Größen

Größen gleicher Art werden addiert bzw. subtrahiert, wenn sie in der gleichen Maßeinheit vorliegen.

Bsp.: $2,13 \text{ m} + 4 \text{ dm } 7 \text{ mm} = 2\,130 \text{ mm} + 407 \text{ mm} = 2\,537 \text{ mm} = 2 \text{ m } 53 \text{ cm } 7 \text{ mm}$
 $8 \text{ € } 45 \text{ ct} - 2,34 \text{ €} = 845 \text{ ct} - 254 \text{ ct} = 591 \text{ ct} = 5,91 \text{ €}$

Wird eine Größe mit einer Zahl multipliziert bzw. durch eine Zahl dividiert, wird nur die Maßzahl multipliziert bzw. dividiert und die Einheit beibehalten.

$$\begin{aligned}\text{Bsp.: } 2,47 \text{ m} \cdot 3 &= 247 \text{ cm} \cdot 3 = (247 \cdot 3) \text{ cm} = 741 \text{ cm} = 7,41 \text{ m} \\ 3,6 \text{ t} : 25 &= 3\,600 \text{ kg} : 25 = (3\,600 : 25) \text{ kg} = 144 \text{ kg}\end{aligned}$$

Der Quotient zweier Größen der gleichen Art ist eine reine Zahl.

$$\text{Bsp.: } 2 \text{ h } 15 \text{ min} : 15 \text{ min} = 135 \text{ min} : 15 \text{ min} = 9$$

FUNKTIONALER ZUSAMMENHANG

Schlussrechnung (Dreisatz)

Entspricht dem Doppelten, Dreifachen, ... einer Größe das Doppelte, Dreifache, ... einer anderen Größe, kann man mit dem Dreisatz aus **drei** Angaben die *vierte* berechnen.

Bsp.:

	Anzahl der Personen	benötigte Menge
$: 2$	4	400 g
$\cdot 7$	2	200 g
	14	1 400 g

Maßstab

Ein Maßstab gibt an, wievielfach größer (oder kleiner) eine Länge in Wirklichkeit im Vergleich zu der Länge in einem Plan (oder einer Abbildung) ist.

Bsp.: Ein Maßstab von $1 : 15\,000$ in einem Plan bedeutet:

1 cm im Plan sind $1\text{ cm} \cdot 15\,000 = 15\,000\text{ cm} = 150\text{ m}$ in Wirklichkeit

300 m = 30 000 cm in Wirklichkeit sind $30\,000\text{ cm} : 15\,000 = 2\text{ cm}$ im Plan