Runden von Dezimalbrüchen

Beim Runden eines Dezimalbruchs muss man vorher die Anzahl der Nachkommastellen festlegen. Dann funktioniert es genauso wie beim Runden von natürlichen Zahlen:

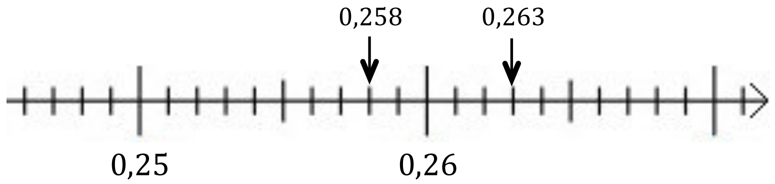
Ist die Stelle rechts davon **0**, **1**, **2**, **3** oder **4** wird **abgerundet**,
ist die Stelle rechts davon **5**, **6**, **7**, **8** oder **9** wird **aufgerundet**.

Bsp.: $4{,}532 \approx 4{,}5$ (auf Zehntel gerundet)
$-0{,}0368 \approx -0{,}04$ (auf Hundertstel gerundet)
$0{,}9997 \approx 1{,}000$ (auf Tausendstel gerundet)

Anordnung auf der Zahlengeraden

Dezimalbrüche lassen sich auf der Zahlengeraden darstellen. Dazu muss die Einteilung jeweils verfeinert werden.
Die erste Stelle, an der sich zwei Dezimalbrüche unterscheiden legt fest, welche Zahl die größere ist.
Von zwei rationalen Zahlen ist diejenige größer, die auf der Zahlengeraden weiter rechts liegt.

Bsp.: $0{,}258 < 0{,}263$



Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

Dezimalbrüche werden gemäß ihren Stellen addiert bzw. subtrahiert. Dabei muss Stelle unter Stelle – Komma unter Komma stehen. Bei unterschiedlich vielen Nachkommastellen muss man evtl. Nullen ergänzen.
Es gelten die bekannten Gesetze und Regeln.

Bsp.: $1{,}6 + 0{,}361 = 1{,}600 + 0{,}361 = 1{,}961$
$0{,}677 - 5{,}44 = 0{,}677 - 5{,}440 = -4{,}763$

Multiplikation von Dezimalbrüchen

Man multipliziert die beiden Dezimalbrüche zunächst ohne Beachtung des Kommas und setzt anschließend das Komma so, dass das Ergebnis genauso viele Dezimalen besitzt wie die beiden Faktoren zusammen.

Bsp.: $3{,}4 \cdot 5{,}87$ ohne Komma: $34 \cdot 587 = 19958 \Rightarrow 3{,}4 \cdot 5{,}87 = 19{,}958$
$3{,}73 \cdot 0{,}5$ ohne Komma: $373 \cdot 5 = 1865 \Rightarrow 3{,}73 \cdot 0{,}5 = 1{,}865$
$0{,}041 \cdot 0{,}09$ ohne Komma: $41 \cdot 9 = 369 \Rightarrow 0{,}041 \cdot 0{,}09 = 0{,}00369$

<u>Zu beachten</u>: Bei einer Multiplikation mit einer Stufenzahl verschiebt sich das Komma um die Anzahl der Nullen nach rechts!

Bsp.: $2{,}438 \cdot 100 = 243{,}8$ oder $0{,}00235 \cdot 10^4 = 23{,}5$

Division von Dezimalbrüchen

Man verschiebt das Komma bei Dividend und Divisor gleichzeitig um so viele Stellen nach rechts, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist und dividiert dann. Beim Überschreiten des Kommas wird auch im Ergebnis das Komma gesetzt.

Bsp.: $1{,}08 : 0{,}3 =$ $10{,}8 : 3 = 3{,}6$

$$\begin{array}{r} \underline{9}| \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

$0{,}182 : 0{,}04 = 18{,}2 : 4 = 4{,}55$ oder $0{,}03672 : 0{,}216 = 36{,}72 : 216 = 0{,}17$

<u>Zu beachten</u>: Bei einer Division durch eine Stufenzahl verschiebt sich das Komma um die Anzahl der Nullen nach links!

Bsp.: $9{,}58 : 100 = 0{,}0958$

Zehnerpotenzen

Brüche mit einer Stufenzahl im Nenner kann man mit Hilfe einer <u>Zehnerpotenz</u> schreiben.

Bsp.: $\frac{1}{1000} = 10^{-3} = 1 \cdot 10^{-3}$ „Zehn hoch minus drei!“

$0{,}07 = \frac{7}{100} = 7 \cdot 10^{-2}$

Potenz einer rationalen Zahl mit natürlichem Exponent

Es ist zu beachten, worauf sich der Exponent jeweils bezieht!

Bsp.: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64}$ (Potenz mit rationaler Zahl als Basis)

aber $\frac{3^3}{4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4} = \frac{27}{4} = 6\,\frac{3}{4}$ (Quotient)

Potenz einer rationalen Zahl mit ganzzahligem Exponent

Die Potenz einer rationalen Zahl mit einem ganzzahligen negativen Exponenten kann man als Bruch mit Zähler 1 schreiben:

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}} = \frac{1}{a^n} \qquad a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$$

Bsp.: $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ oder $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ oder $-3^{-3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = 1 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Beachte: Potenz mit Exponent -1 bedeutet Kehrbruch
Negativer Exponent bei einem Bruch bedeutet Kehrbruch mit positivem Exponent

Umwandeln von Brüchen

Lässt sich der Nenner eines Bruchs durch Erweitern/Kürzen auf eine Stufenzahl bringen, gibt die Anzahl der Nullen im Nenner die Anzahl der Dezimalen und umgekehrt an.

Bsp.: $\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0{,}28$ oder $\frac{3}{10} = 0{,}3$ oder $1{,}076 = 1\frac{76}{1000}$ oder $0{,}052 = \frac{52}{1000} = \frac{13}{250}$

In allen Fällen lässt sich der Bruch mit Hilfe der Division des Zählers durch den Nenner in einen Dezimalbruch umwandeln. Beim Überschreiten des Kommas wird auch im Ergebnis das Komma gesetzt. Bricht hierbei die Division ab, entsteht ein **endlicher** Dezimalbruch; wiederholt sich ein Rest, wiederholen sich auch die Ziffern im Ergebnis. Dann entsteht ein **periodischer** Dezimalbruch.

Bsp.: $\frac{3}{8} = 3:8 = 0{,}375$ oder $\frac{2}{3} = 2:3 = 0{,}6666\ldots = 0{,}\overline{6}$ oder $\frac{1}{6} = 1:6 = 0{,}16666\ldots = 0{,}1\overline{6}$

Enthält der Nenner eines Bruchs nach dem Kürzen nur die Primfaktoren 2 und 5, kann er in einen endlichen Dezimalbruch umgewandelt werden, sonst entsteht ein periodischer Dezimalbruch.

Wichtige endliche und unendlich periodische Dezimalbrüche:

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ $\quad \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad \frac{2}{4} = 0{,}5$ $\quad \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\frac{1}{5} = 0{,}2$ $\quad \frac{2}{5} = 0{,}4$ $\quad \frac{3}{5} = 0{,}6$ $\quad \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\frac{1}{8} = 0{,}125$ $\quad \frac{2}{8} = 0{,}25$ $\quad \frac{3}{8} = 0{,}375$ $\quad \frac{4}{8} = 0{,}5$ $\quad \frac{5}{8} = 0{,}625$ $\quad \frac{6}{8} = 0{,}75$ $\quad \frac{7}{8} = 0{,}875$

$\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$ $\quad \frac{2}{9} = 0{,}\overline{2}$ $\quad \frac{3}{9} = 0{,}\overline{3}$ $\quad \frac{4}{9} = 0{,}\overline{4}$ $\quad \frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$ $\quad \frac{6}{9} = 0{,}\overline{6}$ $\quad \frac{7}{9} = 0{,}\overline{7}$ $\quad \frac{8}{9} = 0{,}\overline{8}$

Rechengesetze anwenden

Auch in der Menge der rationalen Zahlen gilt:

Kommutativgesetz $a+b = b+a$

$a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Distributivgesetz $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beim Rechnen mit rationalen Zahlen ist Folgendes zu beachten:

1) Kürze rechtzeitig
2) Fasse geeignete Summanden zusammen
3) Wähle die Darstellung geschickt aus
(Strichrechnung: eher Dezimalschreibweise; Punktrechnung: eher Bruchschreibweise)
Periodische Dezimalbrüche sind stets in Brüche umzuwandeln
4) Wende die Rechengesetze an

Bsp.: $\frac{6}{30} + \frac{7}{18} \cdot \frac{12}{35} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$\frac{6}{24} - \frac{1}{3} + \frac{6}{8} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$2{,}78 - 3{,}65 + 5{,}22 = (2{,}78 + 5{,}22) - 3{,}65 = 8 - 3{,}65 = 4{,}35$

$\left(3\frac{3}{10} - 4\frac{1}{2}\right) : \frac{9}{5} = (3{,}3 - 4{,}5) \cdot \frac{5}{9} = -2{,}2 \cdot \frac{5}{9} = -\frac{22}{10} \cdot \frac{5}{9} = -\frac{11}{9} = -1\frac{2}{9}$

$0,\overline{4} - \frac{1}{5} = \frac{4}{9} - \frac{1}{5} = \frac{20}{45} - \frac{9}{45} = \frac{11}{45}$

$\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{7}\right) \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{9} - \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{5}{21} + \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{21} = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$

Terme

Bei der Berechnung eines Termwerts ist Folgendes zu beachten:

- Klammern haben stets Vorrang und werden von innen nach außen berechnet!
- Potenzen vor Punktrechnungen (· und :) vor Strichrechnungen (+ und –)!
- Es wird von links nach rechts gerechnet!

Bsp.: $\frac{1}{2} + (-2 - 2 \cdot 2^{-3}) : 3 =$ *Klammern zuerst*

$\frac{1}{2} + \left(-2 - 2 \cdot \frac{1}{8}\right) : 3 =$ *Potenzen vor*

$\frac{1}{2} + \left(-2 - \frac{1}{4}\right) : 3 =$ *Punktrechnung vor*

$\frac{1}{2} + \left(-\frac{9}{4}\right) : 3 =$ *Strichrechnung*

$\frac{1}{2} + \left(-\frac{9}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} =$

$\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ *Von links nach rechts*

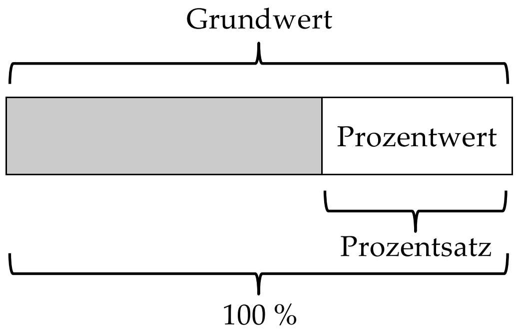
Grundbegriffe der Prozentrechnung

Der **Grundwert** GW ist das Ganze, der **Prozentwert** PW ist der jeweilige Teil (Bruchteil) des Ganzen und der **Prozentsatz** PS ist der Anteil am Grundwert.

„Der **Anteil** von etwas **Ganzem** ergibt den **Bruchteil**!“
„Der **Prozentsatz** vom **Grundwert** ergibt den **Prozentwert**!“

<u>Grundgleichung der Prozentrechnung:</u>

$$\text{"}Prozentsatz \cdot Grundwert = Prozentwert\text{"}$$
$$PS \cdot GW = PW$$



Grundaufgaben der Prozentrechnung

Alle Aufgaben lassen sich mit Hilfe der Grundgleichung der Prozentrechnung, einer Umkehraufgabe dazu oder der Schlussrechnung lösen.

Bsp.: Prozentsatz gesucht — 50 € von 250 €: $\frac{50\text{ €}}{250\text{ €}} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$

Grundwert gesucht — 75 % vom $GW = 2{,}25$ m

$0{,}75 \cdot GW = 2{,}25\text{ m} \implies GW = 2{,}25\text{ m} : 0{,}75 = 3\text{ m}$

oder

$$\begin{array}{cccccc} & 75\ \% & \triangleq & 2{,}25\text{ m} & \\ :3 & & & & :3 \\ & 25\ \% & \triangleq & 0{,}75\text{ m} & \\ \cdot 4 & & & & \cdot 4 \\ & 100\ \% & \triangleq & 3\text{ m} & \end{array}$$

Prozentwert gesucht — 80 % von 580 € : $0{,}80 \cdot 580\text{ €} = 464\text{ €}$